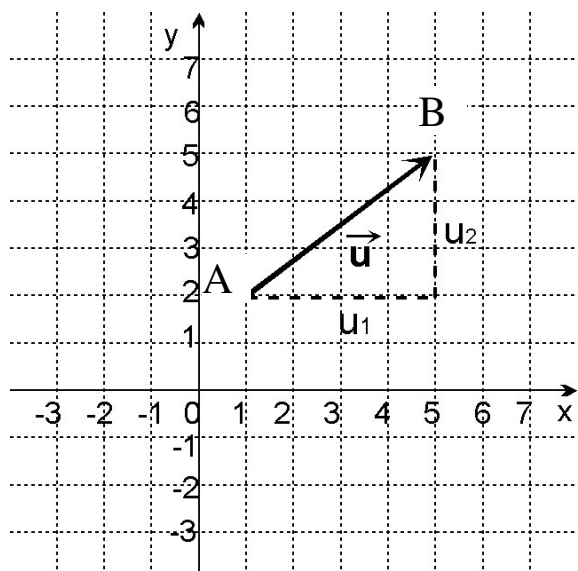


# VEKTOR

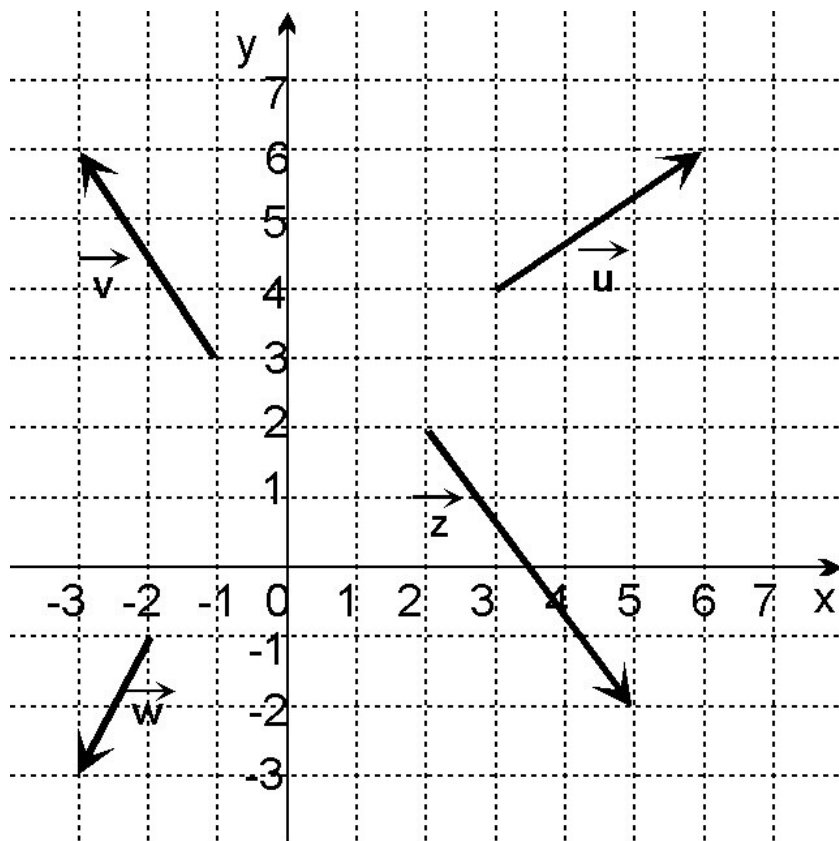
**Definice:** Vektor je posunutí bodu

$$\vec{u}_{AB} = (4; 3)$$



vektor se označuje malými písmeny se šipkou nahoře (v tištěném textu se označuje tučně)  $\Rightarrow \vec{u} = \mathbf{u}$   
závorky souřadnic vektoru ( )  
první souřadnice je x-ová  
druhá souřadnice je y-ová  
bod A je počáteční bod vektoru  
bod B je koncový bod vektoru

**Příklad.:** Určete souřadnice vektorů z obrázku:



Řešení:

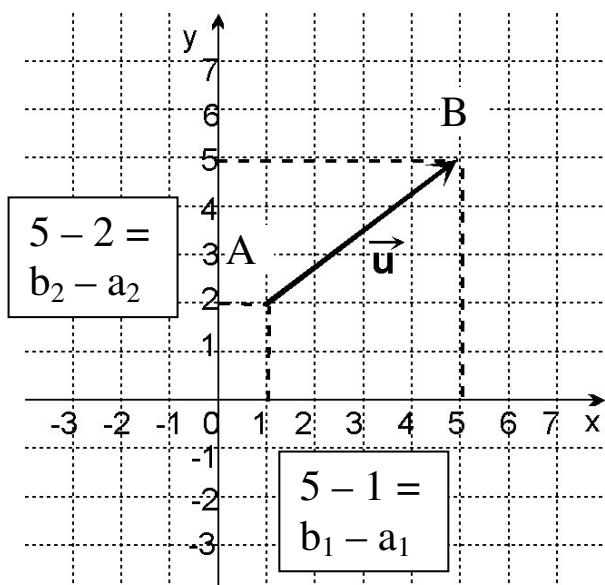
$$\vec{u} = (3; 2)$$

$$\vec{v} = (-2; 3)$$

$$\vec{w} = (-1; -2)$$

$$\vec{z} = (3; -4)$$

$$A = [1; 2] \quad B = [5; 5]$$



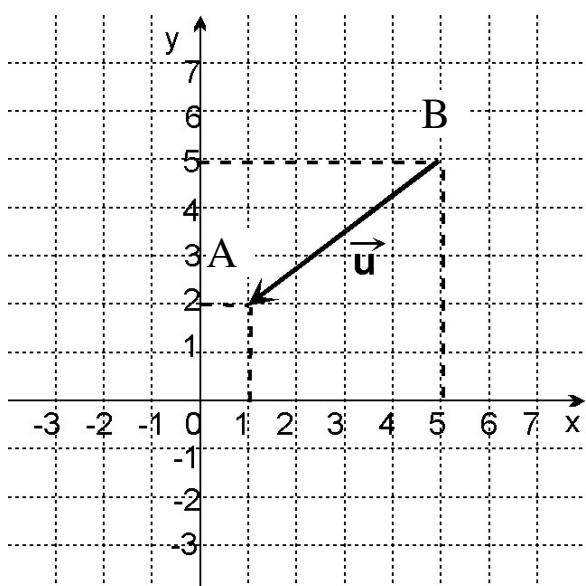
Určete vektor  $\mathbf{u}$ , který je určen body A a B:

Řešení:

$$\mathbf{u}_{AB} = B - A = (4; 3)$$

**Příklad.:**

$$A = [1; 2] \quad B = [5; 5]$$



Určete vektor  $\mathbf{u}$ , který je určen body B a A:

Řešení:

$$\mathbf{u}_{BA} = A - B = (-4; -3)$$

**Cv. 1.:** Určete souřadnice vektorů z počátečního a koncového bodu:

1)  $A = [4; 5] \quad B = [1; 5] \Rightarrow \mathbf{u}_{AB} = ?$

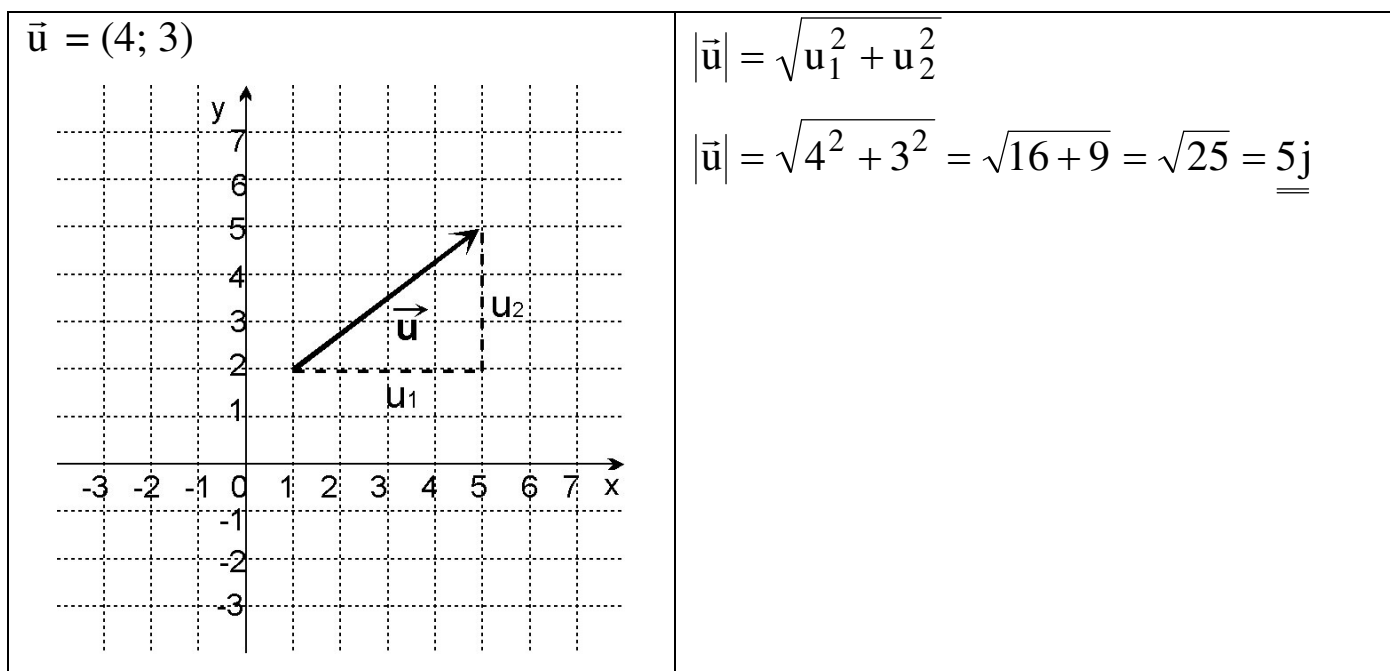
2)  $C = [2; -5] \quad D = [4; 1] \Rightarrow \mathbf{u}_{CD} = ?$

3)  $A = [0; 3] \quad B = [2; 7] \Rightarrow \mathbf{u}_{BA} = ?$

4)  $C = [2; -1] \quad D = [-3; 4] \Rightarrow \mathbf{u}_{DC} = ?$

**Řešení:** 1) (-3;0); 2) (2;6); 3) (-2;-4); 4) (5;-5)

## Velikost vektoru



**Příklad.:** Určete velikost vektoru  $\vec{v} = (6; -8)$ .

**Řešení:**  $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \underline{\underline{10}}$

**Cv. 2.:** Určete velikost vektoru  $\vec{v} = (-8; 15)$ .

**Cv. 3.:** Určete velikost vektoru  $\vec{u} = (3; \sqrt{7})$ .

**Cv. 4.:** Určete velikost vektoru  $\vec{u} = (4; 8)$ .

**Řešení:** 2)  $|\vec{v}| = 17$  j; 3)  $|\vec{u}| = \sqrt{9 + 7} = \sqrt{16} = 4$  j;

4)  $|\vec{u}| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$  j

## Operace s vektory

Jsou dány vektory  $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$  a  $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$ .

**Sčítání vektorů:**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$$

### Odčítání vektorů:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$$

### Násobení vektorů:

1) násobení vektoru skalárem

$$k \cdot \mathbf{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2) \quad k \in \mathbb{R}$$

2) násobení vektoru vektorem

a) skalární součin

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

b) vektorový součin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = ( \dots\dots )$$

**Příklad.:** Vypočítejte:

$\mathbf{u} = (4; 5) \quad \mathbf{v} = (2; 4)$	Řešení:
$\mathbf{u} + \mathbf{v} =$	(6; 9)
$\mathbf{u} - \mathbf{v} =$	(2; 1)
$\mathbf{v} - \mathbf{u} =$	(-2; -1)
$3 \cdot \mathbf{u} =$	(12; 15)
$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{v} =$	(1; 2)
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$	$4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 8 + 20 = 28$

**Cv. 5.:** Pro vektory  $\mathbf{u} = (3; -2)$   $\mathbf{v} = (3; -6)$  vypočítejte:

1)  $\mathbf{u} + \mathbf{v} =$

2)  $\mathbf{u} - \mathbf{v} =$

3)  $\mathbf{v} - \mathbf{u} =$

4)  $(-2) \cdot \mathbf{u} =$

5)  $\frac{1}{3} \cdot \mathbf{v} =$

6)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} =$

**Řešení:** 1) (6;-8) 2) (0;4) 3) (0;-4) 4) (-6;4) 5) (1;-2) 6) 9+12=21

**Cv. 6.:** Určete skalární součin vektorů **u** a **v**:

1)  $\mathbf{u} = (4; 2)$     $\mathbf{v} = (2; -3)$

2)  $\mathbf{u} = (-1; 3)$     $\mathbf{v} = (-2; -1)$

3)  $\mathbf{u} = (4; 3)$     $\mathbf{v} = (-6; 8)$

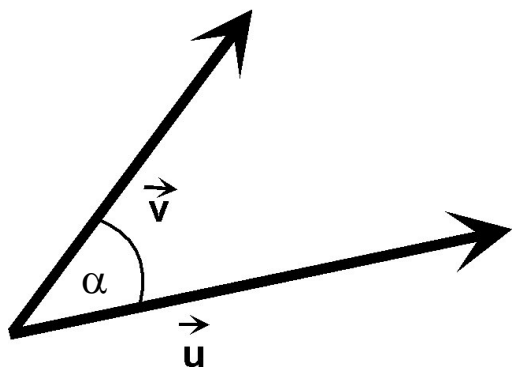
4)  $\mathbf{u} = (5; 2)$     $\mathbf{v} = (-2; -3)$

5)  $\mathbf{u} = (3; 2)$     $\mathbf{v} = (2; -3)$

6)  $\mathbf{u} = (7; 6)$     $\mathbf{v} = (-6; 7)$

**Řešení:** 1) 2 2) -1 3) 0 4) -16 5) 0 6) 0

## Úhel vektorů



Vektory **u** a **v** svírají úhel  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

**Příklad.:** Určete, jaký úhel svírají vektory  $\mathbf{u} = (3; 4)$  a  $\mathbf{v} = (8; 6)$ .

Řešení:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 24 + 24 = 48$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{48}{5 \cdot 10} = 0,96$$

$$\alpha = 16,260204...^\circ = \underline{\underline{16^\circ 15' 37''}}$$

**Cv. 7.:** Určete úhel vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ :

1)  $\mathbf{u} = (4; -3)$     $\mathbf{v} = (15; 8)$

2)  $\mathbf{u} = (-8; 6)$     $\mathbf{v} = (-8; 15)$

3)  $\mathbf{u} = (5; 2)$     $\mathbf{v} = (-2; -3)$

4)  $\mathbf{u} = (4; 3)$     $\mathbf{v} = (-6; 8)$

5)  $\mathbf{u} = (3; 2)$     $\mathbf{v} = (2; -3)$

6)  $\mathbf{u} = (7; 6)$     $\mathbf{v} = (-6; 7)$

**Řešení:** 1)  $64^{\circ}56'33''$  2)  $25^{\circ}3'27''$  3)  $145^{\circ}29'29''$  4)  $90^{\circ}$  5)  $90^{\circ}$  6)  $90^{\circ}$

**Poučka:** Kolmé vektory mají vždy skalární součin roven nule.

**Příklad.:** Určete k vektoru  $\mathbf{u} = (3; 6)$  kolmý vektor  $\mathbf{v}$ .

Řešení: Aby byl vektor kolmý, musí mít skalární součin roven nule.

Nejjednodušší je  $\mathbf{v} = (6; -3)$  nebo  $\mathbf{v} = (-6; 3)$ .

**Cv. 8.:** Určete kolmý vektor k vektorům:

1)  $\mathbf{u} = (4; -5)$

2)  $\mathbf{u} = (-9; 7)$

3)  $\mathbf{u} = (5; 2)$

4)  $\mathbf{u} = (-8; -7)$

**Řešení:** 1)  $(5; 4)$  2)  $(7; 9)$  3)  $(2; -5)$  4)  $(7; -8)$

**Cv. 9.:** Určete úhel vektorů  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ :

1)  $\mathbf{u} = (4; -3)$     $\mathbf{v} = (8; -6)$

2)  $\mathbf{u} = (-8; -6)$     $\mathbf{v} = (-4; -3)$

3)  $\mathbf{u} = (5; 2)$     $\mathbf{v} = (15; 6)$

**Řešení:** 1)  $0^\circ$  2)  $0^\circ$  3)  $0^\circ$

**Poučka:** Vektory, které svírají  $0^\circ$  (mají stejný směr) se nazývají lineárně závislé vektory.

**Poučka:** Vektory, které svírají  $180^\circ$  (mají opačný směr) se nazývají také lineárně závislé vektory.

**Definice:** Vektory jsou lineárně závislé, jestliže je jeden násobkem druhého.

**Příklad.:** Určete, zda vektory  $\mathbf{u} = (21; 12)$  a  $\mathbf{v} = (7; 4)$  jsou lineárně závislé.

**Řešení:**  $\mathbf{u} = 3 \cdot \mathbf{v} \Rightarrow$  vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou lineárně závislé.

**Cv. 10.:** Určete, které z dvojic vektorů jsou lineárně závislé.

1)  $\mathbf{u} = (5; 3)$   $\mathbf{v} = (10; 6)$

2)  $\mathbf{u} = (-12; -9)$   $\mathbf{v} = (-4; -3)$

3)  $\mathbf{u} = (5; 2)$   $\mathbf{v} = (15; 4)$

4)  $\mathbf{u} = (16; 12)$   $\mathbf{v} = (4; 4)$

5)  $\mathbf{u} = (5; 2)$   $\mathbf{v} = (-5; -2)$

**Řešení:** 1) ano 2) ano 3) ne 4) ne 5) ano

**Cv. 11.:** Určete, zda body  $A = [1; 3]$ ;  $B = [2; 4]$  a  $C = [6; 8]$  tvoří trojúhelník.

**Cv. 12.:** Určete, zda body  $A = [-1; 2]$ ;  $B = [4; 4]$  a  $C = [1; -3]$  tvoří trojúhelník.

**Řešení:** 10) ne; 11) ano (je pravoúhlý)

**Cv. 13.:** Body  $A = [-2; 2]$ ;  $B = [2; -1]$  a  $C = [1; 6]$  tvoří trojúhelník. Určete typ trojúhelníku (podle stran i podle úhlů).

**Řešení:** pravoúhlý ( $\alpha = 90^\circ$ ) a rovnoramenný ( $b = c$ )

**Cv. 14.:** Body  $A = [-3; 3]$ ;  $B = [0; -1]$ ,  $C = [4; 2]$  a  $D = [1; 6]$  tvoří čtyřúhelník. Určete typ čtyřúhelníku.

**Řešení:** všechny strany shodné, úhly jsou pravé  $\Rightarrow$  čtverec

**Cv. 15.:** Body  $A = [-3; 3]$ ;  $B = [5; 4]$  a  $C = [1; 6]$  tvoří trojúhelník. Určete všechny vnitřní úhly trojúhelníku.

**Řešení:**  $\alpha = 29^\circ 45'$ ;  $\beta = 33^\circ 41'$ ;  $\gamma = 116^\circ 34'$

